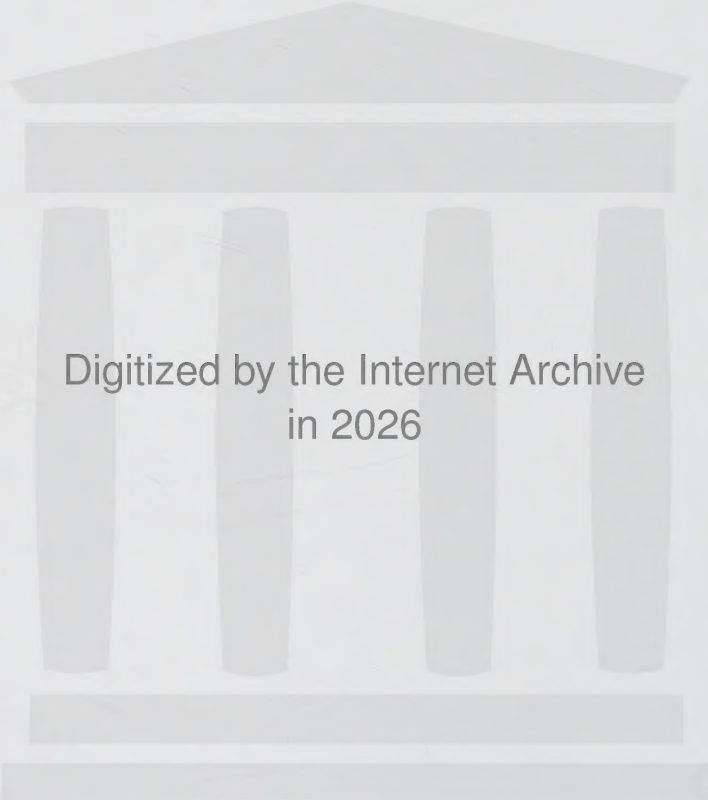


Recollement von Diffusionsprozessen und die Feller-Eigenschaft

von

Volker Dembinski

aus Beuthen



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546220_0071

Recollement von Diffusionsprozessen
und die
Feller-Eigenschaft.

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von
Volker Dembinski
aus Beuthen.



Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen
Fachbereichen der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 21.7.1976

Vorsitzender der Promotionskommission:	Professor Dr. H. Remmert
Erstberichterstatter:	Professor Dr. H. Bauer
Zweitberichterstatter:	Professor Dr. K. Jacobs

Inhalt

Einleitung	1
Notation und Begriffsbildung	4
§1 Feller-Eigenschaft der Halbgruppe und die Glattheit der Trefferverteilungen	7
§2 Glattheit der Trefferverteilungen und die Feller-Eigenschaft der Halbgruppe	15
§3 Anwendungen	26
Literaturverzeichnis	32

Einleitung

In der axiomatischen Potentialtheorie im Sinne von Bauer [1] liefert die Methode, die Meyer in [18] entwickelt, das folgende Resultat: Auf jeder regulären Teilmenge U eines harmonischen Raumes $(E, \mathcal{H})$ existiert ein Diffusionsprozeß X_U (d.h. ein Hunt'scher Prozeß mit stetigen Pfaden), der dem harmonischen Raum $(U, \mathcal{H}(U))$ in dem Sinne adaptiert ist, daß die Trefferverteilungen auf einer Basis der Topologie (und dann sogar auf allen relativkompakten offenen Mengen) mit den harmonischen Maßen übereinstimmen. Überdies ist der Prozeß X_U so "regulär", daß seine Halbgruppe im Unendlichen verschwindet, also den Raum $C_0(U)$ in sich abbildet. Nach Priouret-Courrège [9] kann man die lokalen Prozesse X_U zu einem globalen, an $(E, \mathcal{H})$ adaptierten Prozeß zusammenkleben (siehe (3.2)). Allerdings erlaubt diese -im folgenden Recollement genannte- Technik keine Aussage darüber, wie regulär die Halbgruppe des globalen Prozesses ist. Das ist einer der Gründe, weshalb in den Arbeiten [5] und [12] ganz andere Wege beschritten werden, um an $(E, \mathcal{H})$ adaptierte Prozesse mit "guten" Eigenschaften der Halbgruppe zu konstruieren.

In der Klasse der allgemeinen Diffusionsprozesse ist die Frage ungelöst, ob eine durch Recollement gewonnene Halbgruppe Fellersch ist (d.h. den Raum $C_0(E)$ in sich abbildet), falls alle lokal gegebenen Halbgruppen im Unendlichen verschwinden. Eine positive Antwort geben wir in (3.1.1) unter den Bedingungen, daß der Zustandsraum eines jeden der beteiligten Prozesse eine Basis der Topologie aus Mengen mit transversalem Rand besitzt (zur Definition siehe (1.6)) und die erwartete Lebenszeit des globalen Prozesses stetig und beschränkt ist.

Dabei scheint die erste Bedingung weniger restriktiv zu sein und für die Brownsche Bewegung sowie für die Wärmeleitungsgleichung ist sie auch stets erfüllt. Die Diskussion in (3.1.3) zeigt aber, daß sie sich schon für

allgemeine harmonische Räume, denen doch noch sehr schöne Prozesse entsprechen, nicht mehr ohne weiteres zeigen läßt.

Um das obige Resultat zu erhalten, beobachtet man zunächst, daß Eigenschaften der Trefferverteilung sich sofort auf den globalen Prozeß vererben, wenn die Treffermaße vom Rand der jeweiligen Menge getragen werden. Eine solche Eigenschaft, nämlich

$$(G) \quad P_V: C_b(E \setminus V) \longrightarrow C_b(V)$$

folgen wir in (1.8) aus der Fellerereigenschaft und der gleichmäßigen stochastischen Stetigkeit der Halbgruppe eines vollständigen Hunt-Prozesses (siehe N.2), falls V endliche Austrittszeit und transversalen Rand besitzt.

Die dabei angewandte Technik erinnert an den Beweis, den Gross (in "Potential theory on Hilbert space" J.Fct. Analysis vol.1 (1967)) im Falle der Brownschen Bewegung dafür führt, daß auf stark regulären Mengen die Dirichlet-Lösung stetiger Randfunktionen stetig ist. Und zwar spielt die Skorokhod-Topologie bei uns die Rolle der Translationsinvarianz der Brownschen Bewegung und die starke Regularität einer Menge V ersetzen wir durch die Transversalität ihres Randes.

In (2.1) setzen wir auf einer Basis der Topologie die Eigenschaft (G) und eine Regularitätsbedingung (R) (siehe (N.2)) voraus und zeigen mit Methoden, die Shih in [23] entwickelt, daß die Halbgruppe eines Huntschen Prozesses Fellersch ist, wenn seine erwartete Lebenszeit stetig und beschränkt ist.

Insbesondere folgt für die Theorie der harmonischen Räume im Sinne von [1], daß jeder geeignet gewählte und an die harmonische Struktur adaptierte Prozeß eine Fellersche Halbgruppe besitzt.

Unter geeigneten lokalen Voraussetzungen erhalten wir in (3.1.2) über die Recollement-Technik schließlich eine Ausweitung des Ergebnisses von §2 auf den Fall unendlicher Lebenserwartung.

Den Herren Prof.H.Föllmer, Dr.habil.Nguyen-Xuan-Loc und Prof.M.Nagasawa möchte ich an dieser Stelle für die hilfreichen Gespräche und Hinweise herzlich danken.

Besonderen Dank schulde ich meinem Lehrer Herrn Prof.H.Bauer, der mir dieses Thema zur Bearbeitung überließ und sie mit großer Geduld förderte.

Notation und Begriffsbildung

(N.1) Für topologische Räume T bezeichnen wir mit

$\dot{F}, \bar{F}, \partial F$	das Innere, den Abschluß und den Rand einer Teilmenge F von T .
$C(T)$	den Raum der stetigen Funktionen auf T .
$\underline{B}(T)$	die σ -Algebra der Borelschen Mengen in T und, wenn Mißverständnisse ausgeschlossen sind, auch den Raum der Borel-messbaren Funktionen auf T .
b, o	als Suffixe an Funktionenräumen bezeichnen die Teilräume der beschränkten, beziehungsweise der im Unendlichen verschwindenden Funktionen.
E	ist durchwegs ein lokalkompakter Raum mit abzählbarer Basis, abgekürzt: ein LCD Raum.
E_Δ	die Alexandroff-Kompaktifizierung von E .
$f(\Delta)$	Wir setzen $f \in \underline{B}(E)$ durch $f(\Delta) = 0$ auf E_Δ fort.
$d(x, A)$	Ist T mit einer Metrik d versehen, so schreiben wir $d(x, A)$ für den kleinsten Abstand zwischen einer Teilmenge A von T und einem Punkt x aus T und
d^k	d^k für die Supremumsmetrik auf T^k .

(N.2) Für Markoffsche Prozesse folgen wir der Notation von Blumenthal-Gettoor's Buch [4] mit Ausnahme der Begriffe "Fellersch", "Diffusion" und "vollständiger Hunt-Prozeß". Speziell verstehen wir unter einem Huntschen Prozeß

X	$X = (\Omega, \underline{F}, \underline{F}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ auf E einen Markoffschen Prozeß mit Zustandsraum $(E, \underline{B}(E))$, der normal ist und die folgenden Bedingungen erfüllt
(i)	$\underline{F}_{t+} = \underline{F}_t = \bar{\underline{F}}_t$ für alle t .
(ii)	Die Pfade von X sind fast sicher rechtsstetig auf $[0, \infty[$ und besitzen Links-limites auf $[0, \zeta[$.
(iii)	X ist stark Markoffsch.
(iv)	X ist quasi-linksstetig bezüglich E_Δ auf $[0, \infty[$.

- θ_t bezeichnet die Verschiebung $\theta_t: \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$, definiert durch $X_s \cdot \theta_t = X_{s+t}$.
- (P_t) bezeichnet die Halbgruppe von X , definiert durch $P_t f(x) := E^x[f(X_t); X_t \in E] = E^x[f(X_t)]$.
- T_V, ζ die erste Trefferzeit von X am Komplement einer Teilmenge V von E , und die Lebenszeit ζ von X , definiert durch $T_V := \inf\{t > 0; X_t \in E \setminus V\}$, $\zeta := T_E$.
- P_V bezeichnet den Kern der Trefferverteilung an Komplement V , definiert durch $P_V f(x) := E^x[f(\lambda(T_V)); T_V < \zeta] \quad (f \in B_b(E))$.
- (R) Wir sagen, daß eine Teilmenge V von E die Eigenschaft (R) besitzt, wenn $T_V \cdot \theta_{T_V} = 0$ P^x -f.s. für alle x aus V .

"vollständiger Hunt-Prozeß "

Vollständiger Hunt-Prozeß sagen wir für "Hunt-Prozeß im Sinne von [11] ", d.h. der Prozeß hat alle Eigenschaften wie in der Definition von Blumenthal-Gettoor, außer daß sich die Quasi-Linksstetigkeit in (iv) auf die Topologie von E statt von E_Δ bezieht, und $P_t 1 = 1$ gilt.

"Fellersch " Die Halbgruppe (P_t) eines Prozesses auf E hat die Fellereigenschaft oder ist "Fellersch ", wenn jedes P_t den Raum $C_b(E)$ in sich abbildet.

"im Unendlichen verschwindende Halbgruppe "

Wir sagen, daß die Halbgruppe (P_t) eines Prozesses auf E im Unendlichen verschwindet, wenn jedes P_t den Raum $C_0(E)$ in sich abbildet.

"Diffusion " Ein Huntscher Prozeß heißt Diffusionsprozeß, wenn sein Pfad auf $[0, \zeta[$ fast sicher stetig sind.

H_V Bei harmonischen Räumen folgen wir der Begriffsbildung von Bauer [1]. Speziell bezeichnet H_V für relativkompaktes V den Kern, der durch die harmonischen Maße definiert ist.

(N.3) Weiter vereinbaren wir:

$X(T_V)$ Die Schreibweisen $X_t(\cdot)$, $X(t, \cdot)$ beziehungsweise X_T , $X(T)$ bei Stopzeiten T werden gleichbedeutend nebeneinander verwandt. Ist der Prozeß $w(t)$ sogar kanonisch realisiert, so schreiben wir für $X_t(w)$ auch $w(t)$.

π Mit π bezeichnen wir die erste überabzählbare Ordinalzahl.

Haben alle Elemente einer Menge M eine Eigenschaft (E) gemeinsam, so sagen wir auch: " M besitzt die Eigenschaft (E) ".

§1 Feller-Eigenschaft der Halbgruppe und die Glattheit der Trefferverteilungen.

Für vollständige Hunt-Prozesse X mit (Markoffscher) Halbgruppe (P_t) auf einem LCD Raum E betrachten wir die folgende Glattheitseigenschaft (G):

(1.1) Definition: Eine offene Teilmenge V von E besitzt die Eigenschaft (G) bezüglich X , wenn $P_V f$ stetig ist in V für alle $f \in C_b(E \setminus V)$.

Nun bedeutet die Eigenschaft (G), daß die Bildmaße $X(T_V)(P^{x_n})$ schwach konvergieren für jede in V konvergente Folge (x_n) . Es ist daher naheliegend, den Pfadraum von X zu topologisieren. Dies geschieht in der folgenden Weise:

Wir betrachten X als die kanonische Realisierung von (P_t) auf D , dem Raum aller Abbildungen w von R_+ in E , die rechtsstetig sind und linkslimites besitzen. Weiter wählen wir zur Topologie von E eine vollständige Metrik d und versehen D mit der Skorokhod-Topologie T_1 (bezüglich dieser Metrik).

(1.2) Definition: Eine Folge (w_n) in D konvergiert bezüglich der Skorokhod-Topologie, falls es eine Folge (h_n) von Homöomorphismen des Raumes R_+ gibt, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{|h_n(s) - s|; 0 \leq s \leq k\} = 0$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{d(w_n(s), w(h_n(s))); 0 \leq s \leq k\} = 0.$$

Diese Topologie ist unabhängig von der speziellen Metrik auf E und macht D zu einem Polnischen Raum (siehe [2] und [17]). Da die σ -Algebra $\underline{B}(T_1, D)$ der bezüglich T_1 Borelschen Mengen von den Zylindermengen erzeugt wird, sind die Maße P^x Borel-Maße auf D . Nun haben wir in dem Satz von Skorokhod (in der Version von Stone [25]) ein Kriterium für die schwach Konvergenz einer Folge (P_n) von Wahrscheinlichkeits-Maßen auf D .

(1.3) Satz von Skorokhod: Eine Folge (P_n) von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf D konvergiert schwach gegen ein Wahrscheinlichkeits-Maß P , falls

(i) die endlichdimensionalen Verteilungen der P_n schwach gegen die des Mapes P konvergieren,

(ii) für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $\delta > 0$ gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_n P_n[\sup \min\{d(X_{t_1}, X_{t_2}), d(X_{t_2}, X_{t_3})\} > \delta] = 0.$$

Dabei ist das zweite Supremum über alle t, t_1, t_2 zu bilden, die den Bedingungen $0 \leq t_1 < t_2 \leq k$ und $t-h < t_1 < t_2 < t+h$ genügen.

Wir sind nun in der Lage, Bedingungen an die Halbgruppe (P_t) und an offene Teilmengen V von E anzugeben, unter denen sich die Glattheitseigenschaft (G) von V zeigen läßt. Dazu definieren wir:

(1.4) Definition: Die Halbgruppe (P_t) hat die Eigenschaft (UC) -oder: "ist gleichmäßig stochastisch stetig" (siehe [10], S.70) - ,falls für alle $\delta > 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 - P_h(x, U_\delta(x))) = 0$$

gleichmäßig auf E gilt. $U_\delta(x)$ bezeichnet die δ -Kugel um x .

(1.5) Definition: Wir sagen, daß eine Teilmenge A von E endliche Austrittszeit besitzt, wenn $P^x[T_A < \infty] = 1$ für alle $x \in A$ gilt.

(1.6) Definition: Wir sagen, eine offene Teilmenge V von E hat die Eigenschaft (T) -oder: " V hat transversalen Rand" -, wenn $T_V = T_{\bar{V}}$ P^x -f.s. für alle $x \in V$.

(1.7) Bemerkung: Die Bezeichnung "transversal" kann man am leichtesten rechtfertigen, wenn man sich für den Moment ein Vektorfeld vorstellt. Für den zugehörigen deterministischen Prozeß hat eine Menge dann die Eigenschaft (T), wenn ihr Rand transversal zu allen sie verlassenden Pfaden liegt.

Allgemein gilt: Wegen der Rechtsstetigkeit sind für die Eigenschaft (T) nur diejenigen Pfade interessant, für die bei Start in V der Punkt $X(T_V)$ im Rand von V liegt. Und für diese haben wir die Beziehung $r^{X(T_V)}[T_V=0]=1$ P^X -f.s. ($x \in V$); so daß die Eigenschaft (T) stets (K) (siehe (N.2)) impliziert. Anschaulich bedeutet die obige Gleichung, daß die Randpunkte, die von innen getroffen werden, regulär sind, aber "regulär" in dem stärkeren Sinne, daß bei Austritt aus der Menge V nicht nur sie sondern auch ihr Rand fast sofort verlassen wird (siehe auch die Bemerkung (3.1.3) unten).

(1.8) Satz: Es sei X ein vollständiger Hunt-Prozeß auf E . Ist seine Halbgruppe Fellersch und gleichmäßig stochastisch stetig, so besitzen alle offenen Teilmengen V von E mit endlicher Austrittszeit und transversalem Rand die Eigenschaft (G).

(1.9) Bemerkung: Ist X ein Huntscher Prozeß auf einem LCD Raum F , dessen Halbgruppe (P_t) im Unendlichen verschwindet, so läßt sich X auf der Alexandroff-Kompaktifizierung $E := F \cup \Delta$ als vollständiger Hunt-Prozeß auffassen. Die zugehörige Halbgruppe $Q_t f = P_t(f - f(\Delta)) + f(\Delta)$ ist dann Fellersch und -da E kompakt ist- sogar gleichmäßig stochastisch stetig auf E (siehe Dynkin [10], S.71). Also können wir für diesen Fall das folgende Korollar zu (1.8) formulieren.

(1.10) Korollar: Mit den Bezeichnungen von (1.9) gilt: Ist die erwartete Lebenszeit von X endlich⁽⁺⁾ und hat eine offene Teilmenge V von F transversalen Rand, so ist $P_V f$ stetig auf V für jede Funktion $f \in C_0(F \setminus V)$, die im unendlich-fernen Punkt von F verschwindet.

Den Beweis von (1.8) geben wir in zwei Schritten, die wir als Lemma (1.11) und (1.13) gesondert formulieren.

(1.11) Lemma: Hat eine offene Teilmenge V von E endliche Austrittszeit und transversalen Rand, so sind die Abbildungen T_V und $X(T_V)$ in der Topologie T_1 P^X -f.s. stetig ($x \in V$).

(+) Es würde genügen, für die Teilmengen V von F endliche Austrittszeit zu fordern.

Beweis von (1.11): Wir zeigen zunächst die Stetigkeit von $T := T_V$.

Definiert man $F_p := \{y \in E; d(y, E \setminus V) \geq 1/p\}$ und $T_p := T_{F_p}$ ($p \in \mathbb{N}$),

so weiß man aus ([4] Kap. I, (11.3), S. 62), daß die Folge der

Stopzeiten T_p P^X -f.s. für alle x aus V gegen T aufsteigt.

Seien nun $x \in V$, $w \in [T < \infty] \cap [\sup T_p = T] \cap [T_V = T_V]$ und (w_n) eine bezüglich T_1 gegen w konvergente Folge in D . Mit (h_n) bezeichnen wir die zugehörige Folge von Homöomorphismen des R_+ .

Zeigen wir zuerst die Ungleichung

$$(1) \quad T(w) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} T(w_n)$$

Da w in $[T < \infty] \cap [\sup T_p = T]$ liegt, existiert zu beliebigem

$\alpha > 0$ ein $p \in \mathbb{N}$, so daß $x \in F_p$ und $T(w) - \alpha/2 < T_p(w)$. Also ist

$$(2) \quad w(s) \in F_p \quad \text{für alle } 0 \leq s \leq T(w) - \alpha/2.$$

Wählen wir in der Definition (1.2) ein $k \geq T(w) - \alpha$, so er-

halten wir für jedes $0 < \varepsilon \leq \min(\alpha/2, 1/p(p+1))$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so

daß für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$(3) \quad \sup_{0 \leq s \leq k} |h_n(s) - s| < \alpha/2 \quad \text{und}$$

$$(4) \quad \sup_{0 \leq s \leq k} d(w_n(s), w(h_n(s))) < 1/p(p+1).$$

Zum Beweis von (1) genügt es nun zu zeigen, daß

$$(5) \quad T(w) - \alpha \leq T_{p+1}(w_n) \quad (n \geq n_0)$$

Wegen (3) ist aber $h_n(s) \in [0, T(w) - \alpha/2[$ für alle $0 \leq s \leq T(w) - \alpha$.

Also folgt aus (2):

$$(6) \quad w(h_n(s)) \in F_p \quad (n \geq n_0).$$

Andererseits folgt aus (4) die Beziehung

$$|d(w(h_n(s)), E \setminus V) - d(w_n(s), E \setminus V)| < 1/p(p+1)$$

und dies ergibt zusammen mit (6)

$$1/(p+1) \leq d(w(h_n(s)), E \setminus V) - 1/p(p+1) < d(w_n(s), E \setminus V).$$

Mithin liegt $w_n(s)$ in F_{p+1} für alle $0 \leq s \leq T(w) - \alpha$ und alle $n \geq n_0$. Dies beweist (5).

Um die entgegengesetzte Ungleichung

$$(7) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} T(w_n) \leq T(w)$$

zu zeigen, wählen wir ein $\alpha > 0$, so daß $w(T(w) + \alpha)$ im Komplement von $\bar{V}$ liegt. Da $E \setminus \bar{V}$ offen ist, existiert ein $\eta > 0$, so daß $U_\eta(w(r)) \cap \bar{V} = \emptyset$, wobei $r := T(w) + \alpha$ gesetzt ist.

Weiter existiert wegen der Rechtsstetigkeit von w ein $0 < \epsilon_0 \leq \eta$ mit

$$(8) \quad w([r, r + \epsilon_0]) \subset U_{\eta/2}(w(r)).$$

Da die w_n in der Skorokhod-Topologie gegen w konvergieren, läßt sich zu $\alpha > 0$ und zu jedem $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ ein n_0 derart wählen, daß für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$(9) \quad |h_n(r + \epsilon/2) - (r + \epsilon/2)| < \epsilon/2$$

$$(10) \quad d(w_n(r + \epsilon/2), w(h_n(r + \epsilon/2))) < \eta/2.$$

Aus (8) und (9) folgt: $d(w(h_n(r + \epsilon/2)), w(r)) < \eta/2$

und dies liefert mit (10): $d(w_n(r + \epsilon/2), w(r)) < \eta$.

Also gilt für alle $n \geq n_0$:

$$T(w_n) \leq r + \epsilon/2 = T(w) + \alpha + \epsilon/2.$$

Das heißt, daß für alle $\alpha > 0$, für die $w(T(w) + \alpha)$ im Komplement von $\bar{V}$ liegt, $\limsup T(w_n) \leq T(w) + \alpha$ ist.

Der Wert α kann aber beliebig klein gewählt werden, weil w aus der Menge $[T_V = T_{\bar{V}}]$ genommen wurde. Damit ist (7) gezeigt.

Zusammen ergibt sich, daß T P^X -f.s. stetig ist ($x \in V$).

Die Stetigkeit von X_n ergibt sich nun sehr leicht:

Wählen wir $k \in \mathbb{N}$, so daß $T(w)$ und schließlich alle $T(w_n)$ in das Intervall $[0, k]$ fallen, so ergibt die Konvergenz von $T(w_n)$ gegen $T(w)$ zusammen mit der auf $[0, k]$ gleichmäßigen Konvergenz der h_n gegen die Identität zunächst, daß die Folge $(h_n(T(w_n)))$ gegen $T(w)$ konvergiert. Da aber $(w_n \cdot h_n^{-1})$ ebenfalls gleichmäßig auf $[0, k]$ gegen w konvergiert und $w \in D$ ist, ist zunächst der Abschnittsfilter der Folge $(w_n \cdot h_n^{-1}(h_n(T(w_n))))$ feiner als der Umgebungsfiler der Menge $\{w(T(w)-), w(T(w))\}$. Falls $w(T(w)-)$ im Rand von V liegt, so gilt $T_p(w) < T(w)$ für alle p und aus der Quasi-Linksstetigkeit folgt dann, daß $w(T(w)-) = w(T(w))$.

Falls aber $w(T(w)-)$ ein Element von V ist, so können sich die Werte $w_n(T(w_n))$ nicht dort häufen, da sie alle in der abgeschlossenen Menge $E \setminus V$ liegen.

Also konvergiert $w_n(T(w_n))$ gegen $w(T(w))$.

(1.12) Bemerkung: Ist der Rand einer Menge V nicht transversal, so lassen sich im allgemeinen weder die Aussage von (1.11) noch von (1.8) zeigen. Man betrachte nämlich die gleichmäßige Bewegung auf $\mathbb{R}^2$ mit der Halbgruppe $P_t((x, y), B) := 1_B(x+t, y)$ und wähle als V die Vereinigung von $V_1 := \{(x, y); \max(|x|, |y|) < 1\}$ und $V_2 := (1/2, -1/2) + V_1$. Dann sind die obigen Aussagen für alle $(x, y) \in V$ mit $y = 1/2$ verletzt.

(1.13) Lemma: Ist die Halbgruppe (P_t) Fellersch und gleichmäßig stochastisch stetig, so konvergieren die Maße P^{x_n} schwach gegen P^{x_0} für jede gegen $x_0 \in E$ konvergente Folge (x_n) in E .

Beweis: Wir wollen zeigen, daß die Folge (P^{x_n}) den Bedingungen (i) und (ii) aus (1.3) genügt.

Sei also (x_n) eine Folge, die gegen $x_0 \in E$ konvergiert. Zu

zeigen ist zunächst die schwache Konvergenz der Maße $\mu_{t_1, \dots, t_k}^n(B) := \int \dots \int 1_B(y_1, \dots, y_k) P_{t_k - t_{k-1}}(y_{k-1}, dy_k) \dots P_{t_1}(x_n, dy_1)$ wobei $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$, $k \in \mathbb{N}$ und $B \in \underline{B}^k(E)$ beliebig sind.

Dies geschieht durch vollständige Induktion über k .

Der Fall $k=1$ ist gerade die Felleigenschaft der Halbgruppe. Sei also $g \in C_b(E^{k+1})$ und die Aussage für k bereits gezeigt. Definiert man zu $s := t_{k+1} - t_k$

$$\begin{aligned} f(y_1, \dots, y_k) &:= \int g(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}) P_s(y_k, dy_{k+1}) = \\ &= P_s(g_{y_1, \dots, y_k})(y_k) \end{aligned}$$

so ist $\mu_{t_1, \dots, t_k}^n(f) = \mu_{t_1, \dots, t_{k+1}}^n(g)$

Also bleibt nur noch die Stetigkeit von f zu zeigen.

Es gilt aber:

$$\begin{aligned} &|f(z_1, \dots, z_k) - f(y_1, \dots, y_k)| \leq \\ &\leq |P_s(g_{z_1, \dots, z_k})(z_k) - P_s(g_{y_1, \dots, y_k})(z_k)| + \\ &+ |P_s(g_{y_1, \dots, y_k})(z_k) - P_s(g_{y_1, \dots, y_k})(y_k)|. \end{aligned}$$

Ist nun $d^k(z, y)$ klein, so wird der erste Term klein, da g stetig und $P_s(z_k, dx)$ ein endliches Maß ist, und da (P_t) Fellersch ist, wird auch der zweite Term klein.

Es bleibt (ii) aus (1.3) zu zeigen. Zunächst bedeutet die gleichmäßige stochastische Stetigkeit, daß für alle $\varepsilon, \delta > 0$ ein $h > 0$ existiert, so daß für jedes $y \in E$ und $0 \leq t \leq h$

$$P_t(y, U_\delta(y)) = P^Y[d(X_0, X_t) < \delta] \geq 1 - \varepsilon.$$

Wegen der Markoff-Eigenschaft gilt dann für $z \in E$, $k \in \mathbb{N}$ und alle $0 \leq s \leq k$:

$$P^Z[d(X_s, X_{s+t}) < \delta] = E^Z[P^{X_s}[d(X_0, X_t) < \delta]] \geq 1 - \varepsilon \quad (0 \leq t \leq h).$$

Und " dasselbe " mit $s-t \geq 0$ anstelle von s .

Daraus folgt (1.3)(ii) und damit insgesamt die Behauptung von Lemma (1.13).

Der Beweis von (1.8) ergibt sich nun sehr leicht: Ist $f \in C_b(E \setminus V)$ und besitzt V die verlangten Eigenschaften, so ist für jedes $x \in V$ die Abbildung $f \circ X(T_V)$ nach (1.11) unstetig höchstens auf einer P^X -Nullmenge. Dies genügt, um aus (1.13) die Behauptung zu schließen.

§2 Glattheit der Trefferverteilungen und die Feller-Eigenschaft der Halbgruppe.

In [23] zeigt Shih für kompaktes E , wie man nach Vorgabe einer "Zeitskala" und eines Systems von Kernen einen Huntschen Prozeß auf E konstruiert, der diese Kerne gerade als seine Trefferverteilungen annimmt. Allerdings verlangt Shih -intuitiv gesprochen- die Existenz sowohl von "großen" regulären Mengen, als auch von "von außen" regulären Mengen. Dies schränkt die Anwendbarkeit seiner Arbeit auf die axiomatische Potentialtheorie ein.

Für den Fall aber, daß ein Huntscher Prozeß auf E bereits gegeben ist, kann man -mit geringfügigen Änderungen- seine Methoden und Beweise übernehmen, um den folgenden Satz zu zeigen.

(2.1) Satz: Es sei X ein Huntscher Prozeß auf E , dessen erwartete Lebenszeit $g(x) := E^x[\zeta]$ stetig und beschränkt ist. Dann ist seine Halbgruppe Fellersch, falls eine gegen endliche Durchschnitte abgeschlossene Basis $\mathfrak{B}$ der Topologie existiert, deren Elemente die Eigenschaft (G) und (R) besitzen.

Verkürzt gesagt, erlaubt Shih's Methode den folgenden Plan: Man gehe mit Hilfe geeigneter Zerlegungen von E über zu Schritt-Prozessen, die dann einfacher zu handhaben sind, und approximiere sodann den Ausgangs-Prozeß (genauer seine Resolvente), indem man die Zerlegungen feiner werden läßt.

Um dieses Programm durchzuführen, müssen wir zunächst einige technische Details zusammentragen. Wir fixieren eine Metrik d für E und definieren:

(2.2.1) Für eine Überdeckung $\underline{W}$ von E und eine Zahl M bedeute $d(\underline{W}) < M$, daß alle Elemente von $\underline{W}$ Durchmesser kleiner M haben.

(2.2.2) Aufteilung von E heiße jedes Paar $(\underline{U}, \underline{V})$ abzählbarer Überdeckungen endlichen Typs von E (d.h.: jeder Punkt liegt in nur endlich vielen Überdeckungsmengen), die durchgezählt $\underline{U} = (U_i)$ und $\underline{V} = (V_i)$ die folgenden Eigenschaften haben:

- (i) $\underline{U}$ ist eine offene Überdeckung, $\underline{V}$ eine Zerlegung von E .
 (ii) $V_i \subset U_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

(2.2.3) Eine Aufteilung $(\underline{U}', \underline{V}')$ heiße feiner als $(\underline{U}, \underline{V})$, falls gilt: haben $V'_i \in \underline{V}'$ und $U'_j \in \underline{U}'$ nicht-leeren Schnitt, so ist $U'_i \subset U_j$.

(2.2.4) Das folgende Lemma garantiert uns die Existenz einer immer feiner werdenden Folge von Aufteilungen von E (siehe [22]).

Lemma: Es existiert eine Folge $(\underline{U}^n, \underline{V}^n)$ von Aufteilungen mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $d(\underline{U}^n) < 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
 (ii) $(\underline{U}^m, \underline{V}^m)$ ist feiner als $(\underline{U}^n, \underline{V}^n)$ für $n \leq m$.
 (iii) $V_i^n = U_i^n \setminus U_1^{i-1} U_j^n$.

Beweis: Für jedes n wähle man eine abzählbare, durchschnitts-abgeschlossene Überdeckung $\underline{W}^n$ von endlichem Typ mit $d(\underline{W}^n) < 1/n$.

Setze $\underline{U}^1 = \underline{W}^1$, und wenn $\underline{U}^n$ schon definiert ist, bilde man $\underline{U}^{n+1} := \{U \cap U' ; U \in \underline{U}^n \text{ und } U' \in \underline{W}^{n+1}\}$.

Weiter wähle man eine Abzählung (U_i^n) von $\underline{U}^n$ für die $i \leq j$ gilt, falls $U_i^n \subset U_j^n$ (da alle Systeme von endlichem Typ sind, ist dies stets möglich).

Schließlich definiert man $V_1^n := U_1^n$ und $V_i^n := U_i^n \setminus U_1^{i-1} U_j^n$.

(i) und (iii) sind offensichtlich erfüllt und die spezielle Abzählung der $\underline{U}^k$ liefert zusammen mit der Definition der V_i^k , daß $x \in V_i^k$ stets impliziert: $U_i^k = \bigcap \{U \in \underline{U}^k ; x \in U\}$. Damit läßt sich (ii) wie folgt zeigen.

Es sei $x \in V_i^{n+1} \cap U_j^n$. Dann gilt einerseits $U_i^{n+1} = \bigcap \{U \in \underline{U}^{n+1} ; x \in U\}$ und andererseits ist U_i^{n+1} von der Form $U \cap U'$ mit $U \in \underline{U}^n$ und $U' \in \underline{W}^{n+1}$. Also ist $x \in U_j^n \cap U' \in \underline{U}^{n+1}$ und es folgt $U_i^{n+1} \subset U_j^n \cap U' \subset U_j^n$. Damit gilt (ii) für $n < m$ wegen der

Transitivität von "feiner". Zu zeigen bleibt der Fall $n=m$, aber da $x \in V_i^n \cap U_j^n$ folgt das aus $U_i^n = \cap \{U \in \underline{U}^n; x \in U\}$.

(2.2.5) Bemerkung: Da E ein LCD Raum ist, können wir alle Aufteilungen $(\underline{U}^n, \underline{V}^n)$ so wählen, daß die Überdeckung $\underline{U}^n$ ein Teilsystem der in (2.1) vorgegebenen Basis $\mathcal{B}$ ist.

(2.2.6) Konstruktion eines Schritt-Prozesses zu einer Aufteilung $(\underline{U}, \underline{V})$. Dies geschieht natürlich in Abhängigkeit von unserem Ausgangsprozess $X = (\Omega, \underline{F}, \underline{F}_t, X_t, \theta_t, P^X, \zeta)$.

Man definiert für $x \in E$, $w \in \Omega$ und Ordinalzahlen $\alpha, \beta < \pi$:

$$U_x := U_i \quad \text{falls } x \in V_i$$

$$T(w) := T_{U_x}(w) \quad \text{falls } X_0(w) = x \quad (\text{"Zeit des ersten Sprunges"})$$

$$T_0 := 0$$

$$T_{\alpha+1} := T_\alpha + T \circ \theta_{T_\alpha}$$

$$T_\alpha := \sup\{T_\beta; \beta < \alpha\} \quad \text{für eine Limeszahl } \alpha. \text{ Dies wird}$$

Iteration von T genannt.

$$\Omega' := \Pi\{E; \alpha < \pi\}$$

$$Z_\alpha: \Omega' \longrightarrow E \quad \text{die Projektion}$$

$$\theta_\beta: \Omega' \longrightarrow \Omega' \quad \text{durch } Z_\alpha \circ \theta_\beta = Z_{\alpha+\beta}$$

$$\varphi: \Omega' \longrightarrow \Omega' \quad \text{durch } \varphi(w) := \{X(T_\alpha, w)\}_{\alpha < \pi}$$

$$\underline{H}_\alpha \quad \text{als die von } \{Z_\beta; \beta \leq \alpha\} \text{ erzeugte } \sigma\text{-Algebra}$$

$$\underline{H} \quad \text{als die von } \{Z_\beta; \beta < \pi\} \text{ erzeugte } \sigma\text{-Algebra}$$

$$Q^X := \varphi(P^X) \quad (\varphi \text{ ist } \underline{F} - \underline{H} \text{ meßbar})$$

$$M^X \quad \text{die Erwartung bezüglich } Q^X.$$

$Z := (\Omega', \underline{H}, \underline{H}_\alpha, Z_\alpha, \theta_\alpha, Q^X)$ ist dann ein diskreter, stark Markoffscher Prozeß auf E , der $Q(x, dy) := P_{U_x}(x, dy) = Q^X[Z_1 \in dy]$ als Verteilung des ersten Sprunges hat und da X als Hunt'sch

vorausgesetzt war, die folgende Links-Stetigkeit besitzt:

Z_{α_k} konvergiert Q^X -f.s. gegen Z_α für jede Limeszahl $\alpha < \pi$ und jede gegen α aufsteigende Folge (α_k) .

Wir vereinbaren noch die folgenden Bezeichnungen:

$$(+)\quad g_U(x) := g(x) - P_U g(x), \quad h(x) := g_{U_x}(x).$$

Wie Shih kann man nun zeigen, daß der Prozeß Z dieselben erwarteten Austrittszeiten und dieselben Trefferverteilungen wie der Prozeß X besitzt:

$$(2.3) \text{ Satz: } \Sigma_{\alpha < \pi} M^X[h(Z_\alpha)] = g(x).$$

Beweis: (a) Wir zeigen zunächst für alle α :

$$\Sigma_{\beta < \alpha} M^X[h(Z_\beta)] \leq g(x).$$

Dazu benützen wir aus (2.2.6)(+) die Formel

$$g(y) = h(y) + M^Y[g(Z_1)]$$

um durch transfinite Induktion die folgende Beziehung herzuleiten:

$$(+)\quad g(x) = \Sigma_{\beta < \alpha} M^X[h(Z_\beta)] + M^X[g(Z_\alpha)] \quad (\alpha < \pi).$$

Der Fall $\alpha=0$ ist klar, und aus

$$M^X[g(Z_\alpha)] = M^X[h(Z_\alpha) + M^{Z_\alpha}[g(Z_1)]] = M^X[h(Z_\alpha)] + M^X[g(Z_{\alpha+1})]$$

ergibt sich der Schritt von α zu $\alpha+1$.

Ist α nun eine Limeszahl, und steigt eine Folge (α_k) auf gegen α , so konvergiert $M^X[g(Z_{\alpha_k})]$ gegen $M^X[g(Z_\alpha)]$ wegen der Linksstetigkeit von Z und der Stetigkeit von g . Damit konvergiert aber die für alle k durch $g(x)$ beschränkte Folge

$$(\Sigma_{\beta < \alpha_k} M^X[h(Z_\beta)])_k \text{ notwendig gegen } \Sigma_{\beta < \alpha} M^X[h(Z_\beta)].$$

(b) Die Gleichheit ergibt sich aus folgenden Überlegungen:

Da $h(y) > 0$ für y verschieden von Δ , muß es wegen (a) ein α geben, mit $Z_\alpha = \Delta$. Wegen (+) und $g(\Delta)=0$ ist $M^X[g(Z_\alpha)]=0$, und da Δ absorbiert, folgt schließlich die Behauptung.

(2.4) Bemerkung: Der Beweis zeigt, daß für jedes $x \in E$ ein $\alpha < \pi$ existiert, so daß $Q^X[\zeta \leq \alpha] = 1$.

(2.5) Für eine Teilmenge A von E sei $\sigma_A := \inf\{\alpha < \pi; Z_\alpha \in E \setminus A\}$ und gleich π , falls kein solches α existiert.

(2.6) Satz: Es sei U eine offene Teilmenge von E , die den folgenden Bedingungen genügt:

(i) U besitzt die Eigenschaften (G) und (R).

(ii) Mit x ist auch U_x in U enthalten.

Dann stimmen die Trefferverteilungen von X und Z für U überein, das heißt: $Q^X[Z(\sigma_U) \in dy] = P_U(x, dy)$.

Beweis: Sind U und f wie im Satz, so läßt sich für alle $\alpha < \pi$ zeigen:

$$(+)\quad P_U f(x) = M^X[f(Z(\sigma_U)); \sigma_U \leq \alpha] + M^X[P_U f(Z_\alpha); \alpha < \sigma_U].$$

Betrachtet man nämlich für $\alpha \geq 0$ den zweiten Term, so folgt aus $\sigma_U > \alpha$, daß Z_α in U liegt. Wegen (ii) und (R) gilt dann

$$P_U f(Z_\alpha) = P_{U_{Z_\alpha}} \cdot P_U f(Z_\alpha) = Q(Z_\alpha, P_U f) = M^{Z_\alpha}[P_U f(Z_1)].$$

Somit ergeben sich die folgenden Gleichungen.

$$\begin{aligned} & M^X[P_U f(Z_\alpha); \sigma_U > \alpha] \\ &= M^X[M^{Z_\alpha}[P_U f(Z_1)]; \sigma_U > \alpha] \\ &= M^X[P_U f(Z_{\alpha+1}); \sigma_U > \alpha] \\ &= M^X[P_U f(Z_{\alpha+1}); \alpha < \sigma_U \leq \alpha+1] + M^X[P_U f(Z_{\alpha+1}); \sigma_U > \alpha+1]. \end{aligned}$$

Der erste Term der letzten Zeile ist aber gleich

$$M^X[P_U f(Z_{\alpha+1}); \sigma_U = \alpha+1].$$

Das beweist den Induktionsschritt von α zu $\alpha+1$.

Für eine Limeszahl folgt die Aussage wie im Beweis zu (2.3)

aus der Stetigkeit von $P_U f$ in U und der Links-Stetigkeit

von Z . Die Behauptung folgt dann aus (+) und (2.4).

(2.7) Korollar: Es sei U wie in (2.6). Dann gilt für jedes $x \in E$:

$$P_n^X[\tau_{U(x)} \leq t, h(\tau_{U(x)})] = g_U(x).$$

Beweis: Nach (2.6) sind die Verteilungen von σ_U und T_U gleich. Wir können daher den Beweis von (2.3) auf die in U induzierten Prozesse übertragen.

(2.8) Um nun die angekündigte Approximation durchzuführen, konstruiert man sich zu jeder Aufteilung $(\underline{U}^n, \underline{V}^n)$ aus (2.2.4) den zum "Skelett" Z^n gehörigen kontinuierlichen Schrittprozess Y^n , wie dies etwa in dem Buch von Blumenthal-Gettoor in Kap. I, §12 getan wird. Die Y^n zugehörigen Maße werden wir mit P_n^X bezeichnen. Der Index n an Y , z.B. Y_t^n oder $Y^n(T_U)$ versteht sich meist von selbst und wird dann weggelassen.

Y^n ist wieder ein Hunt'scher Prozess und die Aussagen (2.3), (2.6) und (2.7) gehen über in:

$$(2.8.1) \quad P_n^X[Y(T_U) \leq dy] = P^X[X(T_U) \leq dy]$$

$$(2.8.2) \quad E_n^X[\xi] = g(x)$$

$$(2.8.3) \quad E_n^X[T_U] = g_U(x)$$

wobei E_n^X die Erwartung bezüglich P_n^X bezeichnet und U eine Menge ist, die die Voraussetzungen von (2.6) erfüllt.

(2.9) Definiert man für eine Aufteilung $(\underline{U}^n, \underline{V}^n)$ die Menge $U(n, x)$ genauso wie U_x in (2.3.6), so folgt aus (2.8.1) das

Lemma. Setzt man $\delta := T_{U(n, x)}$ und bezeichnet mit R_α die Iterierten dieser Stoptzeit, so gilt:

$$P_n^X[Y(R_\alpha) \leq dy] = P^X[\lambda(R_\alpha) \leq dy] \quad (x \in E, n \in \mathbb{N}, \alpha < \infty).$$

Beweis: Da $(\underline{U}^n, \underline{V}^n)$ speziell eine Verfeinerung von sich selbst ist, erfüllt $U(n, x)$ die Bedingung (ii) aus (2.6).

Daher ist (2.8.1) gerade die Behauptung im Falle $\alpha=1$.

Der Schluß von α auf $\alpha+1$ wird geleistet durch

$$E_n^X[f(Y(R_{\alpha+1}))] = E_n^X[E_n^Y(R_\alpha)[f(Y(R))]] = E^X[f(X(R_{\alpha+1}))].$$

Und für eine Limeszahl folgt der Induktionsschritt wiederum aus "Huntsch".

(2.10) bezeichnen wir mit (R_λ^n) beziehungsweise (R_λ) die Resolventen der Prozesse Y^n beziehungsweise X , so haben wir:

Satz: Ist f gleichmäßig stetig und beschränkt auf E , so konvergiert die Folge $(R_0^n f)_n$ gleichmäßig auf E gegen $R_0 f$.

Beweis: Sei also f gleichmäßig stetig und beschränkt auf E . Dann wählen wir zu $\eta > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$|f(x) - f(y)| < \eta$ für $d(x, y) < 1/N$. Die Stopzeit R sei für $n \geq N$ definiert wie in (2.9). Dann gilt:

$$R_0^n f(x) = \sum_{\alpha < \pi} E_n^X[E_n^Y(R_\alpha) \int_0^R f(Y_t) dt]$$

$$R_0 f(x) = \sum_{\alpha < \pi} E^X[E^X(R_\alpha) \int_0^R f(X_t) dt]$$

Weiter ergibt sich $|f(X_t) - f(X_0)| < \eta$ und $f(Y_t) = f(Y_0)$

für alle $t < R$, da P_n^Y -f.s. R die Zeit des ersten Sprunges ist.

Aus (2.8.3) und (2.9) folgt dann:

$$\begin{aligned} |E^Y \int_0^R f(X_t) dt - E_n^Y \int_0^R f(Y_t) dt| &= |E^Y \int_0^R f(X_t) dt - f(y) \cdot \xi_{U(n, y)}(y)| = \\ &= |E^Y \int_0^R (f(X_t) - f(y)) dt| \leq \eta \cdot E^Y[R]. \end{aligned}$$

Setzen wir die letzte Formel und nochmals (2.9) in (+) ein,

so ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned}
 & |R_0 f(x) - R_0^n f(x)| = \\
 & = |\Sigma_{\alpha < \pi} E^x [E^{X(R_\alpha)} \int_0^R f(X_t) dt] - \Sigma_{\alpha < \pi} E^x [E_n^{Y(R_\alpha)} \int_0^R f(Y_t) dt]| \\
 & = |\Sigma_{\alpha < \pi} \int (E^Y \int_0^R f(X_t) dt - E_n^Y \int_0^R f(Y_t) dt) E^x [X_{T_\alpha} \epsilon dy]| \\
 & \leq |\Sigma_{\alpha < \pi} E^x [\eta \cdot E^{X(R_\alpha)} [R]]| = \eta \cdot g(x) \leq \eta \cdot \|g\|
 \end{aligned}$$

und damit die Behauptung.

(2.11) Satz: Mit f ist auch $R_0 f$ stetig und beschränkt auf E .

Beweis: Nach ([2], S.11)⁽⁺⁾ genügt es, gleichmäßig stetige Funktionen f zu betrachten. Sei also $\eta > 0$, x_0 in E beliebig, und (x_p) eine gegen x_0 konvergente Folge in E . Wir wählen N aus $\mathbb{N}$ so, daß f auf der Überdeckung $\underline{U}^N$ höchstens um η schwankt.

Man wähle weiter eine Schrumpfung (W_i) von (U_i^N) mit $P_n^{x_0}[Y(R_\alpha) \in \partial W_i] = 0$ für alle $n, i \in \mathbb{N}$ und $\alpha < \pi$. Dann definiere man zu (W_i) eine Zerlegung (G_i) , genauso wie die Zerlegung (V_i) zu (U_i) definiert wurde, und setze:

$$\begin{aligned}
 h'(x) &:= g_{U_i}(x) & \text{falls } x \in G_i \\
 S(w) &:= T_{U_i}(w) & \text{falls } Y_0(w) \in G_i.
 \end{aligned}$$

Mit den Iterierten S_k ($k \in \mathbb{N}$) gilt dann:

$$(1) \quad \lim_n E_n^{x_0}[\tilde{f}(Y(S_k))] = E_n^{x_0}[\tilde{f}(Y(S_k))]$$

für alle $n \geq N$, $k \in \mathbb{N}$ und alle Funktionen $\tilde{f}$, die stetig sind auf den Mengen G_i (Induktion über k).

weiter haben wir:

$$(2) \quad R_0^n f(x) = \Sigma_0^{k'} E_n^x [E_n^{Y(S_k)} \int_0^S f(Y_t) dt] + E_n^x [R_0^n f(Y(S_{k'+1}))]$$

und insbesondere für $f = 1_E$

$$(3) \quad g(x) = \Sigma_0^{k'} E_n^x [h'(Y(S_k))] + E_n^x [g(Y(S_{k'+1}))].$$

(+) Das Portmanteau-Theorem

Wir setzen $S_\infty := \sup\{S_k; k \in \mathbb{N}\}$ und wollen in einer Zwischenrechnung zeigen, daß

$$(4) \quad g(x) = E_n^x[S_\infty] = E_0^\infty E_n^x[h'(Y(S_k))].$$

Hierzu sei K kompakt in E . Es existiert eine endliche Indexmenge J , so daß $(G_i)_{i \in J}$ die Menge K überdeckt. Da J endlich ist und die Abstände von G_i zu $E \setminus U_i$ positiv sind, ist $\inf h'$ positiv auf K . Zusammen mit (3) und der Beschränktheit von g folgt:

$$(5) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} P_n^x[Y(S_k) \in K] = 0$$

Daraus ergibt sich

$$(6) \quad P_n^x[Y(S_\infty) \in E] = 0 \quad \text{wie folgt:}$$

Wählt man eine aufsteigende Folge (K_n) kompakter Mengen mit Vereinigung E , so hat man $[Y(S_\infty) \in E] = \bigcup_n [Y(S_\infty) \in K_n]$. Wegen "Huntsch" aber ist $[Y(S_\infty) \in K_n] \subset \bigcup_{m=1}^\infty \bigcap_{k>m} [Y(S_k) \in K_{n+1}]$ was (6) beweist. Aber (6) bedeutet nichts anderes als:

$$g(x) = E_n^x[S_\infty].$$

Der zweite Teil von (4) ergibt sich so: Für alle k' ist

$$E_n^x[S_{k'+1}] = E_0^{k'} E_n^x[h'(Y(S_k))] \quad \text{denn es gilt}$$

$$\begin{aligned} E_n^x[S_{k'+1}] &= E_n^x[S_{k'} + S(\phi_{S_{k'}})] \\ &= E_n^x[S_{k'}] + E_n^x[E^{Y(S_{k'})}[S]] \\ &= E_n^x[S_{k'}] + E_n^x[h'(Y(S_k))]. \end{aligned}$$

Anwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz führt nun zu der Formel (4).

Wenden wir uns wieder dem Hauptproblem zu. Wegen (4) kann man zu x_0 ein k' so groß wählen, daß

$$(7) \quad E_n^{x_0}[g(Y(S_{k'+1}))] < \eta.$$

Nun zerlegt man den ersten Term von (2) in

$$\Sigma_0^{k'} \Sigma_n^X [h'(Y(S_K)) \cdot f(Y(S_K))] + \Sigma_0^{k'} \Sigma_n^X [E^Y(S_K)]_0^S (f(Y_t) - f(Y_0)) dt].$$

Man wähle nun k' wie in (7) und beachte, daß die Funktionen h', f und g auf den Mengen G_i stetig sind und daß der zweite Term von (2) durch $2 \cdot \Sigma_n^X [g(Y(S_{K'+1}))]$ nach oben abgeschätzt werden kann. Dann folgt aus (1) und daraus, daß $|f(Y_t) - f(Y_0)| < \eta$ für alle $t < S$ ist, die folgende Abschätzung für alle $n \geq N$:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |R_n^X f(x_0) - R_0^X f(x_0)| \leq \eta + 2\eta \cdot |g| + 2\eta \cdot |f|.$$

Zusammen mit (2.10) ergibt sich die Behauptung.

(2.12) Mit Hilfe der Resolventengleichung erhält man nun das folgende Korollar zu (2.11):

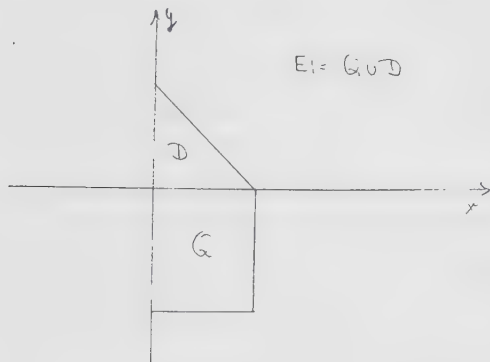
Korollar: Mit f ist auch $R_\lambda f$ stetig und beschränkt auf E .

(2.13) Der Beweis von (2.1) ergibt sich jetzt wie folgt: Ist X als Markscher Prozeß insbesondere normal und rechtsstetig, hat X schwachstetige Halbgruppe, das heißt: für alle $f \in C_b(E)$ ist $\lim P_t f(x) = f(x)$ ($x \in E$). Also ist auch die Resolvente (R_λ) schwach und damit stark stetig auf $C_b(E)$; der Satz von Hille-Yoshida liefert dann die Behauptung.

(2.14) Bemerkungen: (1) Daß von der erwarteten Lebenszeit Stetigkeit und Beschränktheit gefordert wird, ist etwas unbefriedigend (siehe dazu (3.1.2)). Allerdings kommt man nicht ohne jede Bedingung an die Zeitskala aus, da Zeitänderungen die Trefferverteilungen nicht ändern, sehr wohl aber die Keller-Eigenschaft zerstören können, wie in dem folgenden Beispiel.

Man wähle für X die zweidimensionale gleichmäßige Bewegung und definiere die Geschwindigkeit als $v(x,y) = 1$ für $y \geq 0$ und $= 2$ sonst. Dann ist $P_t f(x,y) = f(x+t,y)$ für $y \geq 0$ und $= f(x+2t)$ sonst, also nicht Fellersch. X geht aber aus der gleichmäßigen Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit 1 hervor durch die Zeitänderung $t = \int_0^t 1/v(X_s) ds$.

(2) Die Existenz einer Basis mit Eigenschaft (G) ist wesentlich, wie das folgende Beispiel zeigt. Wiederum wandeln wir die gleichmäßige Bewegung ab. Man wähle für Z die folgende Menge



Bei Start in Q möge sich jedes Teilchen parallel zur x -Achse bewegen, bei Start in dem gleichschenkligen Dreieck D jedoch parallel zur y -Achse; beides mit Geschwindigkeit 1. Dies definiert einen Huntischen Prozeß, dessen erwartete Lebenszeit stetig und beschränkt ist und dessen Halbgruppe nicht die Feller-Eigenschaft besitzt. Andererseits existiert auch keine Basis mit Eigenschaft (G), denn zu jeder offenen Menge, die einen Punkt der x -Achse enthält, gibt es eine stetige Randfunktion, deren Lösung in diesem Punkt unstetig ist.

§3 Anwendungen

In diesem Paragraphen benützen wir -was das Zusammenkleben von Prozessen angeht- Theorem (2.4.2) aus [9], ohne auf Details dieser Technik näher einzugehen (siehe aber [19] und [20]).

Für unsere Situation läßt sich dieser Satz wie folgt formulieren. Es sei (X_i, U_i) ein verträgliches System von Diffusionsprozessen X_i auf den Elementen U_i einer offenen Überdeckung von E . Wobei die Verträglichkeit darin besteht, daß für alle i, j die Prozesse X_i und X_j auf dem Schnitt von U_i mit U_j denselben Prozeß induzieren. Dann existiert ein "zugehöriger globaler" Diffusionsprozeß, der auf jeder Menge U_i gerade den Prozeß X_i induziert.

Wir können nun Bedingungen angeben, unter denen die Halbgruppe des globalen Prozesses Fellersch ist.

(3.1.1) Satz: Es sei (X_i, U_i) ein abzählbares, verträgliches System von Diffusionsprozessen, deren Halbgruppen im Unendlichen verschwinden. Dann ist die Halbgruppe des zugehörigen globalen Prozesses auf E Fellersch, falls die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind.

- (i) Jede der Mengen U_i besitzt eine Basis mit Eigenschaft (T).
- (ii) Die erwartete Lebenszeit von X ist stetig und beschränkt oder unendlich auf E .

Beweis: Wir betrachten zuerst den Fall stetiger und beschränkter Lebenserwartung.

Hierfür folgt aus (1.10), daß jedes U_i eine Basis mit der Eigenschaft (G) bezüglich X_i besitzt. Aus der Stetigkeit der Pfade und daraus, daß X auf jedem U_i mit X_i übereinstimmt, ergibt sich, daß auch E eine Basis mit Eigenschaft (G) (bezüglich X) und -wegen (1.7)- auch die Eigenschaft (R) besitzt.

Dann liefert aber (2.1) die Behauptung, da sich die Eigenschaft (T) auf enaliche Schnitte vererbt.

Den Fall unendlicher Lebenserwartung führen wir wie folgt auf den vorigen zurück: Für $\lambda > 0$ gehen wir über zu den jeweiligen λ -Teilprozessen X^λ, X_i^λ . Dieser Übergang ist vertauschbar mit Recollement und das Verschwinden im Unendlichen der lokalen Halbgruppen bleibt ungeändert. Da weiter die erwartete Lebenszeit von X_i^λ gleich $1/\lambda(1 - E^X[e^{-\lambda T_{U_i}}])$ und damit endlich ist, folgt über (1.11), daß jede Menge $V \subset U_i$ mit Eigenschaft (T) auch bezüglich der neuen Trefferverteilung $P_V^\lambda f(x) = E^X[f \cdot X(T_V) \cdot e^{-\lambda T_V}]$ die Eigenschaft (G) besitzt. Da außerdem die erwartete Lebenszeit von X^λ gleich $1/\lambda$ ist, folgt wie zuvor, daß X^λ die Voraussetzungen von (2.1) erfüllt. Seine Halbgruppe und damit die von X ist also Fellersch.

(3.1.2) Bemerkung: Mit Hilfe von (3.1.1) können wir das Ergebnis von §2 auf den Fall unendlicher Lebenszeit in dem folgenden Spezialfall ausdehnen:
Es sei X ein Prozeß auf E , dessen erwartete Lebenszeit unendlich ist und der eine Basis mit Eigenschaft (T) besitzt. Dann ist seine Halbgruppe Fellersch, falls eine Überdeckung (U_i) von E existiert, sodaß alle Prozesse X^{U_i} Diffusionsprozesse sind, deren Halbgruppen im Unendlichen verschwinden.

(3.1.3) Bemerkungen: In diesem Zusammenhang ist die Frage interessant, ob es stets eine Basis mit Eigenschaft (T) gibt.

(1) Im Falle der Brownschen Bewegung und der Wärmeleitungsgleichung gibt Held in ([13], S.46) eine positive Antwort. Als Bedingung benützt er: eine offene Teilmenge V von E hat die Eigenschaft (T), wenn ihr feiner Abschluß bereits abgeschlossen ist, und Held zeigt, daß die Kugeln beziehungsweise Kegel dies erfüllen.

(2) Betrachtet man allgemeine harmonische Räume, so ist zunächst enttäuschend, daß nicht jede reguläre Menge transversalen Rand hat. Immerhin besitzt (T) aber eine gewisse Ähnlichkeit mit den hinreichenden Regularitäts-Bedingungen von Poincaré beziehungsweise Zaremba in der klassischen Potentialtheorie (lokal von außen berührbar durch Kugeln beziehungsweise Kegel): Sei nämlich V eine relativkompakte offene Teilmenge von E und x ein Randpunkt von V , für den es eine gegen $\{x\}$ absteigende Folge (U_n) regulärer Mengen gibt mit $P_{U_n}(x, \partial V) = 0$. Dann erfüllt x die Bedingung $P^X[T_V = T_{\bar{V}}] = 1$, falls:

$$\inf_n P_{U_n}(x, E \setminus V) > 0.$$

Beweis: Für alle U_n haben wir zunächst wegen $P_{U_n}(x, \partial V) = 0$

$$P^X[X(T_{U_n}) \in E \setminus V] = P^X[X(T_{U_n}) \in E \setminus \bar{V}].$$

Aus $[T_{\bar{V}} = 0] \supset \bigcap_n [T_{\bar{V}} \leq T_{U_n}] \supset \bigcap_n [X(T_{U_n}) \in E \setminus \bar{V}]$ folgt dann

$P^X[T_{\bar{V}} = 0] > 0$ und damit $P^X[T_V = T_{\bar{V}}] = 1$, falls sich zeigen läßt, daß die Folge (T_{U_n}) P^X -f.s. gegen Null absteigt.

Wegen $\inf T_{U_n} = T_{\{x\}} = : T_x$ (siehe [4], S.53) genügt es zu zeigen, daß $E^X[T_x] = 0$ ist.

Die Stetigkeit der μ -f.a.d. und $\lim_n P_{U_n} 1(x) = 1$ (siehe [1], S.47) impliziert $X(T_x) = x$ P^X -f.s. Daher folgt nach ([4], Thm.(11.4), S.62) $P^{X(T_x)}[T_x = 0] = 1$ μ -f.s. für jedes Startmaß μ , insbesondere also $E^X[T_x] = 0$.

(3) Eine oft handlichere Bedingung hat man für den Fall, daß es zu dem harmonischen Raum einen starken Harnackschen Kegel gibt (siehe [3]):

Es existiert eine Basis mit Eigenschaft (T), wenn alle Kugeln $B(x,s)$ in der Harnackschen Metrik (für genügend kleines s) mit dem Inneren ihres Abschlusses übereinstimmen.

Denn: Ist der Prozeß X zu einem strikten Potential p auf E gewählt, so stimmen für reguläre Mengen W die erwartete Austrittszeit aus W mit der universellen Barriere $G^W = p - H_W p$ überein. Existiert nun zu regulärem V eine gegen $\bar{V}$ absteigende Folge (V_n) regulärer Mengen, so ist

$$G^V(y) = E^y[T_V] \leq E^y[T_{\bar{V}}] \leq G^{V_n}(y) \quad \text{auf } V$$

und G^{V_n} konvergiert gegen G^V , falls das Innere von $\bar{V}$ gleich V ist. Nach ([3], S.95) existiert aber zu $V := B(x,s)$ bei genügend kleinem s stets eine derartige Folge (V_n) .

(4) In der Situation unendlich divisibler Prozesse auf lokalkompakten Gruppen beweisen Port und Stone in ([21], S.229) eine Reichhaltigkeitsaussage, zwar nicht für (T) aber für eine ganz ähnliche Eigenschaft (intuitiv ist der Unterschied der von "regulär" zu "von außen regulär").

Betrachtet man allgemeine Huntsche Prozesse, so ist nur soviel bekannt, daß man im Fall beschränkter Erwartung der Lebenszeit zu jeder offenen Menge V einen Parallel-Körper V_r finden kann, so daß $P^x[T_{V_r} = T_{\bar{V}_r}] = 1$ für die Punkte x einer abzählbaren dichten Teilmenge von V_r gilt (siehe [23], S.71).

(3.2) In der Einleitung wurde angedeutet, daß sich die Methode von Meyer [18] mit Hilfe der Recollement-Technik auf harmonische Räume im Sinne von Bauer anwenden läßt. Dies wollen wir zum Schluß genauer ausführen. Dabei nennen wir einen Prozeß adaptiert an einen harmonischen Raum $(E, \mathcal{H})$, wenn für alle relativkompakten offenen Mengen V die Kerne P_V und H_V übereinstimmen.

(3.2.1) Es sei $(E, \mathcal{H})$ ein streng harmonischer Raum mit superharmonischer 1 (siehe [1]). Dann existiert ein stetiges und beschränktes striktes Potential p und zu ihm ein adaptierter Huntscher Prozeß auf E , dessen erwartete Lebenszeit gleich p ist und dessen Halbgruppe die Feller-Eigenschaft besitzt.

Beweis: Für eine Brelotschen harmonischen Raum konstruiert Meyer im ersten Teil seiner Arbeit ([18], §1-§5) zunächst ein stetiges und beschränktes striktes Potential p auf E und -in Abhängigkeit von ihm- für jede reguläre Menge W in E eine stark stetige Resolvente (T_λ^W) auf $C_0(W)$, die zusätzlich $T_0^W 1 = p - H_W p$ erfüllt.

Dies überträgt sich wörtlich auf unseren Fall, wenn man die beiden wichtigsten Hilfsmittel aus der Potentialtheorie, die hier benützt werden -nämlich der Approximations-Satz ([6], S.97) für die Konstruktion von p und den Satz von Hervé ([14], S.456) über U -Majoranten- ersetzt durch die entsprechenden Sätze der Bauerschen Theorie ([1], (2.7.4) S.75 und (5.3.1) S.153).

Es sei nun p wie oben und (W_n) eine Überdeckung von E mit regulären Mengen. Der Satz von Hille-Yoshida liefert zur Resolvente (T_λ^W) die Existenz einer stark-stetigen Halbgruppe (P_t^n) auf $C_0(W_n)$. Also existiert (z.B. nach [4], S.46) auf jedem W_n ein Huntscher Prozeß X^n , der an $\mathcal{H}(W_n)$ adaptiert ist. Das System (X^n, W_n) ist verträglich, da je zwei Prozesse X^n und X^m auf dem Schnitt von W_n mit W_m sowohl gleiche Trefferverteilungen (wegen adaptiert) als auch dieselbe erwartete Lebenszeit haben (wegen $T_0^W 1 = p - H_W p$) und damit gleich sind (siehe [8], Ap.(2.3)).

Nach [9] existiert also ein Huntscher Prozeß auf E mit p als erwarteter Lebenszeit, der adaptiert ist, da die harmonischen Maße $H_U(x, dy)$ vom Rand von U getragen werden. Die Behauptung ergibt sich nun aus (2.1), denn für eine Basis aus regulären Mengen sind die Eigenschaften (G) und (R) natürlich erfüllt.

(3.2.2) Bemerkung: Auf allgemeine $\mathcal{F}$ -harmonische Räume im Sinne von [7] läßt sich der Beweis von (3.2.1) nicht ausdehnen, da er das Basis-Axiom (aus [1]) wesentlich benützt. Nach Taylor [26] existiert aber auch für $\mathcal{F}$ -harmonische Räume E mit superharmonischer 1 zu jedem stetigen und beschränkten Potential p ein Diffusionsprozeß X auf E , dessen erwartete Lebenszeit gleich p ist. Daß die Halbgruppe von X dann Fellersch ist, erschließt man wie folgt: Zunächst impliziert das Bauersche Konvergenzaxiom die Eigenschaft (G) für jede resolutive Menge. Andererseits wird die Eigenschaft (R) im Beweis zu (2.1) (genauer: im Beweis zu (2.6)) nur benützt, um aus $V \subset U$ auf $P_V P_U = P_U$ schließen zu können. Dies ist für eine Basis aus resolutiven Mengen aber stets erfüllt.

L i t e r a t u r

- [1] Bauer, H.: harmonische Räume und ihre Potentialtheorie. Lecture Notes in Math. 22, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1966.
- [2] Billingsley, D.: Convergence of probability measures. New York-London-Sydney-Toronto, Wiley, 1968.
- [3] Bliedtner, J. und K. Janssen: Harnacksche Kegel und Metrik in harmonischen Räumen. Math. Ann. 198 (1972), 85 - 97.
- [4] Blumenthal, P.M. and R.K. Gettoor: Markov processes and potential theory. New York-London, Academic press, 1968.
- [5] Boboc, N., C. Constantinescu and A. Cornea: Semigroups of transitions on harmonic spaces. Revue Roum. Math. Pures Appl. 12 (1967), 763 - 805.
- [6] Brelot, L.: Lectures on potential theory. Tata Inst. of fundamental research, Bombay, 1960.
- [7] Constantinescu, C. and A. Cornea: Potential theory on harmonic spaces. Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1972.
- [8] Courrège, Ph. et P. Priouret: Axiomatique du problème de Dirichlet et processus de Markov. Séminaire Brelot-Choquet-Deny (Théorie du Potentiel) 8e année, 1963/64, 8-01 - 8-48.
- [9] Courrège, Ph. et P. Priouret: Recollement de processus de Markov. Publ. Inst. Stat. Univ. Paris 14 (1965), 275-377.
- [10] Dynkin, E.B.: Markov processes I. Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1965.
- [11] Gettoor, R.K.: Markov processes: Ray processes and right processes. Lecture Notes in Math. 440, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1975.
- [12] Hansen, W.: Konstruktion von Halbgruppen und Markoffschen Prozessen. Inventiones math. 3 (1967), 179 - 214.
- [13] Held, N.: Über das Hochheben von stetigen Markoffprozessen auf Überlagerungsflächen. Dissertation, Erlangen, 1973.

- [14] Hervé, R.M.: Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel. Ann.Inst. Fourier 12 (1962), 415 - 571.
- [15] Kellogg, O.D.: Foundations of potential theory. Berlin, Springer, 1929.
- [16] Lamperti, J.: On random time substitutions and the Feller property. Markov Processes and Potential Theory (Ed. J. Chover), Wiley, New York-London-Sydney 1969, 87 - 101.
- [17] Maisonneuf, M.: Topologies du type de Skorokhod. Séminaire de probabilités VI, Lecture Notes in Math. 258, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1972, 113 - 117.
- [18] Meyer, P.A.: Brelot's axiomatic theory of the Dirichlet problem and Hunt's theory. Ann.Inst.Fourier 13 (1963), 357 - 372.
- [19] Meyer, P.A.: Renaissance, recollemnts, melanges, ralentissement de processus de Markov. erscheint in: Lecture Notes in Math., Séminaire de probabilités X.
- [20] Nagasawa, M.: Note on pasting of two Markov processes. erscheint demnächst.
- [21] Port, C.S. and Ch.J.Stone: Infinitely divisible processes and their potential theory. Ann.Inst. Fourier 21 (1971), 157 - 275.
- [22] Shih, C.T.: Markov processes whose hitting distributions are dominated by those of a given process. Trans.Amer. math.Soc. 129 (1967), 157 - 179.
- [23] Shih, C.T.: Construction of Markov processes from hitting distributions. Z.Wahrscheinlichkeitstheorie verw.Geb. 18 (1971), 47 - 72.
- [24] Skorokhod, A.V.: Limit theorems for Markov processes. Theor.Probab.Appl. 3 (1958), 202 - 246.
- [25] Stone, C.: Weak convergence of stochastic processes defined on semi-infinite time intervalls. Proc.Amer. math.Soc. 14 (1963), 694 - 696.
- [26] Taylor, J.C.: Strict potentials and Hunt processes. Inventiones math. 16 (1972), 294 - 259.

Lebenslauf

3.1.1944	geboren in Beuthen OS
Eltern	Hubert und Luzie Dembinski, geb. Kusche
Beruf des Vaters	kaufmännischer Angestellter
Beruf der Mutter	Hausfrau
1950-54	Besuch der Volksschule in Bobingen bei Augsburg
1954-64	Besuch des humanistischen Gymnasiums "bei St. Anna" in Augsburg
Juli 1964	Reifeprüfung an dieser Schule
1.10.64-31.3.66	Wehrdienst bei der Bundeswehr
SS 1966	Erstimmatrikulation an der Universität Erlangen-Nürnberg für <u>Math.</u> -Phys.
Mai 1968	Diplom-Vorprüfung in Mathematik
14.3.69	Heirat mit Sieglinde Dembinski, geb. Vogel
Mai 1971	Diplom-Hauptprüfung in Mathematik
ab Herbst 68	Beschäftigung als studentische/wissenschaftliche(r) Hilfskraft/Mitarbeiter am mathematischen Institut der Universität Erlangen-Nürnberg

Fotodruck: Mainz, Aachen, Malteserstraße 9, am Ponttor, Telefon (02 41) 2 73 05
Betrieb: Neupforte 13, Nähe Markt